16/11/2018

Βάση ενός δ.χ. V είναι υποσύνολο S ώστε το S να γεννά το χώρο $V = \langle S \rangle$ και το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Κάθε διάνυσμα u έχει μοναδική αναπαράσταση ως προς συγκεκριμένη βάση $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ τότε $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$ τα $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ είναι μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί

Θεώρημα: Έστω V δ.χ. πεπερασμένης διάστασης και $S = \{u_1, \ldots, u_k\}$ μια βάση του. Τότε $\forall$ βάση του V έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων και αυτός ο αριθμός καλείται διάσταση του $\dim V = k$

$S=\{u_1,\dots,u_k\}$ $V=\langle S\rangle$ και S γρ. ανεξ.

$S'=\{v_1,\dots,v_k\}$ $V=\langle S'\rangle$ και S' γρ. ανεξ.

Τότε $k=n=\dim V$

π.χ. $\mathbb{R}^n$ έχει κανονική βάση $e_1=(1,0,\dots,0)$
$e_2=(0,1,\dots,0)$, $e_n=(0,0,\dots,1)$

$\dim \mathbb{R}^n=n$
$(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \Rightarrow (x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1(1,0,\dots,0)+x_2(0,1,\dots,0)$
$\dots+x_n(0,0,\dots,1)=x_1\cdot e_1+x_2\cdot e_2+\dots+x_n e_n$

$S=\{e_1,\dots,e_n\}\Rightarrow \mathbb{R}^n=\langle S\rangle$ και το S είναι γρ. ανεξ.

$(0,\dots,0)=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\dots+\alpha_n e_n \Rightarrow$
$(0,0,\dots,0)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\Rightarrow \alpha_1=\dots=\alpha_n=0$

Το S είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

2) $P_n=\{\alpha_n x^n+\dots+\alpha_1 x_1+\alpha_0 \mid \alpha_n,\dots,\alpha_0\in\mathbb{R}\}$

$S=\{x^n,x^{n-1},\dots,x,1\}$ αποτελεί βάση του P_n $\dim P_n=n+1$

3) $P_\infty=\{\forall$ πολυώνυμο οποιουδήποτε βαθμού$\}$

$P_\infty\supseteq P_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$S=\{1,x,\dots,x^{n+1},x^{n+2}\dots\}$ κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του S είναι γρ. ανεξ. $\Rightarrow$

S είναι γρ. ανεξ. $S' \subsetneq S \Rightarrow \exists\, x^m \in S'$: το m να είναι μέγιστο $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x^m = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$
$\forall i = 1, \ldots, m$

Επίσης το S γεννά τον χώρο διότι $\forall\, P_n$ εφόσον είναι πεπερασμένο άθροισμα γράφεται σαν γρ. συνδιασμός στοιχείων του S. Άρα $P_\infty = \langle S \rangle$ και S γρ. ανεξ. $\Rightarrow$ S είναι βάση του $P_\infty \Rightarrow$ $\dim P_\infty = \infty$

4) $M(3\times 4, \mathbb{R})$ δ.χ.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{34}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ γεννά τον $M(3\times 4, \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{34}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \Rightarrow \dim M(3\times 4, \mathbb{R}) = 12$ Άρα γενικά $\dim M(m\times n, \mathbb{R}) =$
$\forall i = 1, \ldots, 12$ $= mn$

$\dim \mathbb{R}^{mn} = mn = \dim P_{mn-1}$

Πρόταση Έστω V πεπερ. διάστασης δ.χ. Ένα υποσύνολο του S το οποίο είναι μέγιστο γραμ. ανεξ. θα είναι βάση του. Ένα υποσύνολό του το οποίο θα είναι ελάχιστο ώστε να γεννά τον χώρο θα είναι βάση του

S γραμ. ανεξ. μέγιστο.

Μέγιστο σημαίνει ότι αν προσθέσω οποιοδήποτε άλλο στοιχ. του V, τότε παύει να είναι γρ. ανεξ. Για να είναι βάση αρκεί να γεννά τον χώρο. $S=\{u_1, \ldots, u_n\}$ και $u \in V$ τυχαίο.

$S \cup \{u\}$ γρ. εξαρτημένο. Άρα $\exists$ μη μηδενικοί αριθμοί:

$$u + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = \bar{0}$$

$u = -a_1 u_1 - \ldots - a_n u_n$ είναι γρ. συνδιασμός $\Rightarrow$

$\langle S \rangle = V \Rightarrow S$ βάση

Εάν $S' \subseteq V$ και το S' είναι ελάχιστο ώστε να γεννά τον χώρο $V = \langle V \rangle$ $\quad S' \subseteq V$

Για να είναι βάση το S' θα πρέπει να είναι γρ. ανεξ.

$S' = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Τότε $\forall u \in V$ θα γράφεται $u = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n$

Έστω ότι το S' είναι γρ. εξαρτημένο $\Leftrightarrow \exists$ κάποιο στοιχείο του, έστω v_1 το οποίο είναι γρ. συνδ. του υποσυνόλου

$$v_1 = \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_n v_n$$

Άρα το τυχαίο ① θα γράφεται $u = b_1(\gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_n v_n) + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n$

$u = (b_1\gamma_2 + b_2)v_2 + (b_1\gamma_3 + b_3)v_3 + \ldots + (b_1\gamma_n + b_n)v_n$ το τυχαίο u γράφεται σαν γρ. συνδιασμός $\{v_2, v_3, \ldots, v_n\} = \langle \{v_2, \ldots, v_n\} \rangle = V$

$\{v_2, \ldots, v_n\} \subsetneq S'$ Αδύνατο.

Πόρισμα Κάθε δ.χ. V έχει βάση

Πόρισμα Αν $\dim V = n$ και $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ γρ. ανεξ. υποσύνολο του, τότε $k \leq n$

Υποχώρος ενός δ.χ. και Y_1, Y_2 υπόχωροι του V. Τότε $Y_1 \cap Y_2$ είναι υπόχωρος του V

Αποδ. Θέλουμε $Y_1 \cap Y_2 \leq V$ πρέπει $\forall u_1, u_2 \in Y_1 \cap Y_2$ και $\alpha u_1 \in Y_1 \cap Y_2$
$u_1, u_2 \in Y_1 \cap Y_2 \Rightarrow u_1, u_2 \in Y_1$ και $u_1, u_2 \in Y_2$ $\quad Y_1, Y_2 \leq V \Rightarrow u_1 + u_2 \in Y_1$, $u_1 + u_2 \in Y_2$ και $\alpha u_1 \in Y_1$, $\alpha u_1 \in Y_2 \Rightarrow u_1 + u_2 \in Y_1 \cap Y_2$ και $\alpha u_1 \in Y_1 \cap Y_2$

Π.χ. Έστω $Y_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ώστε $2x + 3y - z = 0\}$ και
$Y_2 = \{a(1,1,1) + b(0,1,2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Να βρεθεί η $Y_1 \cap Y_2$
Y_1 επίπεδο από την αρχή των αξόνων
Y_2 γρ. συνδ. δύο διανυσμάτων
Άρα $Y_1 \cap Y_2$ είναι υπόχωρος και μάλιστα ευθεία, σαν η τομή δύο επιπέδων

Θα βρούμε βάσεις για τους υπόχωρους

$Y_2 = \langle (1,1,1), (0,1,2) \rangle$ και είναι γρ. ανεξ.
Y_1 $2x + 3y - z = 0 \Rightarrow z = 2x + 3y$ Το τυχαίο $(x, y, z) \in Y_1$ έχει
$(x, y, 2x + 3y) = (x, 0, 2x) + (0, y, 3y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 3)$

Άρα $Y_1 = \langle (1,0,2), (0,1,3) \rangle$ και είναι γρ. ανεξ.

Έστω ένα κοινό διάνυσμα $u \in Y_1 \cap Y_2$

$$\left.\begin{aligned} u \in Y_1 &\Rightarrow u = \alpha(1,0,2) + b(0,1,3) \\ u \in Y_2 &\Rightarrow u = \kappa(1,1,1) + \lambda(0,1,2) \quad (\oplus) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(1,0,2) + b(0,1,3) = \kappa(1,1,1) + \lambda(0,1,2)$$

$$(\alpha, b, 2\alpha+3b) = (\kappa, \kappa+\lambda, \kappa+2\lambda)$$

$$\alpha = \kappa$$
$$b = \kappa+\lambda$$
$$2\alpha+3b = \kappa+2\lambda$$

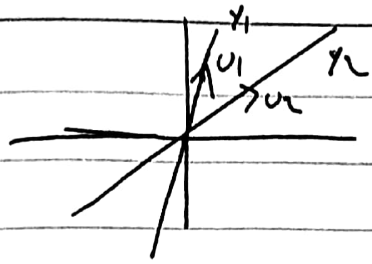
Θα λύσουμε το σύστημα ή προς α, b ή προς κ, λ.

$$2\alpha+3b = \kappa+2\lambda \Rightarrow 2\kappa+3\kappa+3\lambda = \kappa+2\lambda$$
$$4\kappa+\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -4\kappa}$$

$$\oplus \Rightarrow u = \kappa(1,1,1) - 4\kappa(0,1,2) \Rightarrow u = \kappa(1,1,1) + \kappa(0,-4,-8) \Rightarrow$$
$$u = \kappa(1,-3,-7) \quad \kappa \in \mathbb{R}$$
$Y_1 \cap Y_2 = \langle (1,-3,-7) \rangle$ ευθεία.

$\dim Y_2 = 2$
$\dim Y_1 = 2$
$\dim(Y_1 \cap Y_2) = 1$
$$\underset{3}{\dim \mathbb{R}^3} + \underset{1}{\dim Y_1 \cap Y_2} = \underset{2}{\dim Y_1} + \underset{2}{\dim Y_2}$$

Προσοχή η ένωση υπόχωρων $Y_1 \cup Y_2$ δεν είναι υπόχωρος εκτός αν $Y_1 \subseteq Y_2$ ή $Y_2 \subseteq Y_1$



$Y_1 \cup Y_2 \subseteq \mathbb{R}^2$

$\left.\begin{array}{l} u_1 \in Y_1 \cup Y_2 \\ u_2 \in Y_1 \cup Y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 + u_2 \in Y_1 \cup Y_2$

$u_1 + u_2 \notin Y_1 \cup Y_2 \Rightarrow Y_1 \cup Y_2 \not\leq \mathbb{R}^2$

$\langle Y_1 \cup Y_2 \rangle = \{$ όλοι τοι γραμ. συνδ. στοιχείων του Y_1 ή και Y_2 $\}$
$= \{ \alpha u + \beta v \mid u \in Y_1, v \in Y_2$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

$\langle Y_1 \cup Y_2 \rangle$ είναι ο υπόχωρος που γεννάται από τα στοιχ. του Y_1 και Y_2

Ορισμός Αν Y_1, Y_2 είναι υπόχωροι του δ.χ. V τότε ορίζεται το άθροισμα $Y_1 + Y_2 = \{ \alpha u + \beta v \mid u \in Y_1, v \in Y_2 \}$

$\left.\begin{array}{l} Y_1 \leq Y_1 + Y_2 \\ Y_2 \leq Y_1 + Y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y_1 + Y_2$

$Y_1 + Y_2 \leq V$
και μάλιστα $\langle Y_1 \cup Y_2 \rangle = Y_1 + Y_2$

Πρόταση: Τότε το άθροισμα $Y_1 + Y_2$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος ο οποίος περιέχει $Y_1 \cup Y_2$

Ορισμός Έστω $Y_1, Y_2 \leq V$ δ.χ. Το άθροισμα $Y_1 + Y_2$ θα καλείται ευθύ αν $Y_1 \cap Y_2$ Συμβολίζουμε $Y_1 \oplus Y_2$. Αν επιπλέον $Y_1 \oplus Y_2 = V$, τότε το Y_2 καλείται ένα ευθύ συμπλήρωμα του Y_2

π.χ. Δίνεται ο $Y_1 = \{ x + y + z = 0 \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$ και $Y_2 = \{ \alpha(1,-1,0) + \beta(2,2,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$
Εξετάστε αν $Y_1 \oplus Y_2$. Αν δεν είναι να βρεθεί ένα ευθύ

συμπλήρωμα του Y_1
$Y_1 \oplus Y_2 \iff Y_1 \cap Y_2 = \{\bar{0}\}$
Να βρεθεί $Y_1 \cap Y_2$ Βάσεις για τους Y_1, Y_2

$z = -x-y \Rightarrow (x,y,z) = (x,y,-x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$ Άρα

$Y_1 = \langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle$
$Y_2 = \langle (1,-1,0), (2,2,0) \rangle = \langle (1,-1,0), (1,1,0) \rangle$

$(1,-1,0) \in Y_1$

$Y_1 + Y_2 \ni (1,-1,0)$
$Y_1 \cap Y_2 = (1,-1,0)$
$Y_1 \oplus Y_2$ ΟΧΙ

Θέλουμε $Y_1' \subseteq \mathbb{R}^3$ και $Y_1 \oplus Y_1' = \mathbb{R}^3$
$\dim Y_1' = 1 \Rightarrow Y_1' = \langle (1,0,0) \rangle$
διότι $(1,0,0) \notin Y_1$
Θ.δ.ο. το τυχαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ είναι τυχαίος συνδυασμός των βάσεων του Y_1 και Y_1'. Τότε το Y_1' θα είναι ένα ευθύ συμπλήρωμα του Y_1.

$(x,y,z) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1) + \gamma(1,0,0)$
α, β, γ συναρτήσει των x,y,z

$x = \alpha + \gamma \qquad \gamma = x - \alpha = x + z + y$
$y = \beta \qquad \Rightarrow \beta = y$
$z = -\alpha - \gamma \quad \Rightarrow \alpha = -z - \beta = -z - y$